



ce
pre
UNI

Aritmética

FRACCIONES

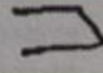
**CICLO
PREUNIVERSITARIO
2023–2**

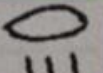


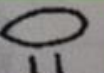
Aporte de los egipcios

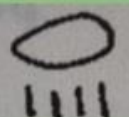
El origen de las fracciones, o quebrados, es muy remoto. Ya eran conocidas por los babilonios, egipcios y griegos. Los egipcios resolvían problemas de la vida diaria mediante operaciones con fracciones. Entre ellas la distribución del pan, el sistema de construcción de pirámides y las medidas utilizadas para estudiar la tierra. Esto lo comprobamos en numerosas inscripciones antiguas como el Papiro de Ahmes.

Fracciones egipcias

$$\frac{1}{2}$$


$$\frac{1}{3}$$


$$\frac{2}{3}$$


$$\frac{1}{4}$$


$$\frac{3}{4}$$


Orígenes de la coma decimal



El punto como signo de separación entre las unidades enteras y decimales, aparece por primera vez en la "*Aritmética*" del italiano Francesco Pellos (1492), pero solamente para separar cifras del dividendo, cuando el divisor terminaba en cero.



En 1585, Simón Stevin publicó un librito sobre la escritura de los números decimales, realizando operaciones aritméticas entre ellos, tratando de evitar hacer cálculos con fracciones



En 1616, John Napier, un gran aristócrata escocés, introdujo en los países latinos, la coma decimal como elemento de separación.

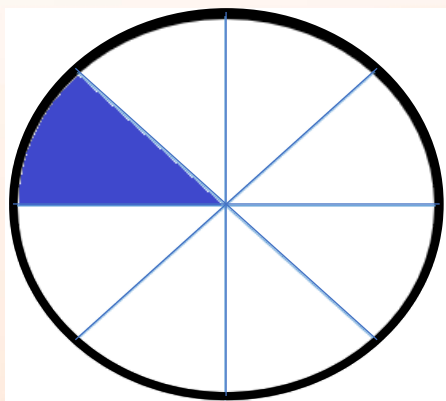
FRACCIONES

Del capítulo anterior, en forma práctica, al par ordenado $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se le representa por $\frac{a}{b}$

Sea $f = \frac{a}{b}$ una fracción, donde: a es el numerador y b es el denominador

INTERPRETACIÓN

Si dividimos el círculo en 8 partes iguales y tomamos una parte.



$$\frac{1}{8}$$

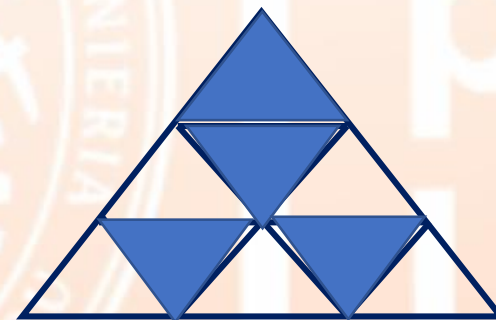
(NUMERADOR)

PARTE

TOTAL

(DENOMINADOR)

Si dividimos el triángulo en 9 partes iguales y tomamos cuatro partes.



$$\frac{4}{9}$$

Tenemos la octava parte de un total

Tenemos los cuatro novenos de un total

Clases de Fracciones

Sean: $a; b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, la fracción $\frac{a}{b}$ es:

1. Propia Si: $|a| < |b|$ Ejemplo: $\frac{-7}{12}; \frac{7}{9}; \frac{2}{-11}; \frac{-3}{-16}$

2. Impropia Si: $|a| > |b|$ Ejemplo: $\frac{12}{-10}; \frac{-13}{9}; \frac{17}{13}; \frac{-23}{-18}$

3. Unitaria Si: $|a| = |b|$ Ejemplo: $\frac{10}{-10}; \frac{-6}{-6}; \frac{-11}{11}; \frac{21}{21}$

4. Irreducible, cuando sus términos son primos entre sí. Ejemplo: $\frac{16}{-27}; \frac{45}{56}$

5. Decimal, cuando el denominador es una potencia de 10

Ejemplo: $\frac{16}{1}; \frac{37}{10}; \frac{-127}{10000}$

6. Ordinaria o común, cuando no es decimal. Ejemplo: $\frac{74}{60}; \frac{-23}{99}$

Aplicación 01

Se tiene una fracción propia cuyos términos son números consecutivos, si a dicha fracción se le suma $\frac{1}{72}$ se obtiene una fracción que resulta de sumar una unidad a cada término de la fracción original. Calcule la suma de los términos de la fracción original.

A) 7

B) 8

C) 11

D) 13

E) 15

Resolución:

$$f = \frac{a}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{a+1} + \frac{1}{72} = \frac{a+1}{a+2}$$

$$\frac{a+1}{a+2} - \frac{a}{a+1} = \frac{1}{72} \Rightarrow \frac{a^2 + 2a + 1 - (a^2 + 2a)}{(a+2)(a+1)} = \frac{1}{72}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+2)(a+1)} = \frac{1}{72} \Rightarrow 72 = (a+2) \cdot (a+1) \Rightarrow a = 7$$

$$\Rightarrow f = \frac{a}{a+1} = \frac{7}{8} \Rightarrow a + (a+1) = 15$$

Aplicación 02

Se tiene M fracciones cuya diferencia de términos es 2, además son mayores que $\frac{2}{7}$ pero menores que $\frac{3}{5}$, calcula el producto de cifras de M .

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 6

Resolución:

Sea $f = \frac{a}{b}$ una fracción propia

$$\underbrace{\frac{2}{7} < \frac{a}{a+2}}_{(1)} < \underbrace{\frac{a}{a+2} < \frac{3}{5}}_{(2)}$$

$$\Rightarrow \text{De (1): } 2a + 4 < 7a \Rightarrow 0,8 < a$$

$$\Rightarrow \text{De (2): } 5a < 3a + 6 \Rightarrow a < 3$$

$$\Rightarrow \text{De (1) y (2): } a = 1; 2$$

$$\Rightarrow M = 2$$

$$\Rightarrow \text{Producto de cifras de } M = 2$$

Un grupo de fracciones son:

a) Fracciones Homogéneas Cuando los valores absolutos de sus denominadores son iguales

Ejemplo: $\frac{-7}{6}; \frac{5}{-6}; \frac{11}{6}$

b) Fracciones Heterogéneas Cuando no son homogéneas.

Ejemplo $\frac{-7}{4}; \frac{6}{14}; \frac{4}{-7}$

PROPIEDADES

Sean: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{c}{d}$ entonces se dirá que

$\frac{a}{b}$ es un divisor de $\frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d}$ es un múltiplo de $\frac{a}{b}$

Ejemplo: $5 \left(\frac{9}{10} \right) = \frac{9}{2}$ entonces: $\frac{9}{10}$ es un divisor de $\frac{9}{2}$ y $\frac{9}{2}$ es un múltiplo de $\frac{9}{10}$

Sean $\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \dots, \frac{f}{r}$ fracciones irreducibles, entonces

$$MCD\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \dots, \frac{f}{r}\right) = \frac{MCD(a, b, \dots, f)}{MCM(p, q, \dots, r)} \quad \text{y} \quad MCM\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \dots, \frac{f}{r}\right) = \frac{MCM(a, b, \dots, f)}{MCD(p, q, \dots, r)}$$

Ejemplo:

Calcule el MCD y MCM de las siguientes fracciones:

Para aplicar la fórmula, se requiere fracciones irreducibles:

$$MCD\left(\frac{20}{8}, \frac{12}{7}, \frac{35}{45}\right) = MCD\left(\frac{5}{2}, \frac{12}{7}, \frac{7}{9}\right) = \frac{MCD(5, 12, 7)}{MCM(2, 7, 9)} = \frac{1}{126}$$

$$MCM\left(\frac{20}{8}, \frac{12}{7}, \frac{35}{45}\right) = MCM\left(\frac{5}{2}, \frac{12}{7}, \frac{7}{9}\right) = \frac{MCM(5, 12, 7)}{MCD(2, 7, 9)} = \frac{420}{1}$$

Sean: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ fracciones irreducibles, tales que: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

es un número entero, entonces: $b = d$ ó $b = -d$

DEMOSTRACIÓN:

Sea: $k \in \mathbb{Z}$, tal que: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = k$

$$\rightarrow \frac{ad + bc}{bd} = k \rightarrow ad + bc = bdk \dots (*)$$

De (*) tenemos:

$$ad = b(dk - c) \rightarrow ad = b^{\circ}$$

Por el principio de Arquímedes:

a y b son PESI

$$\rightarrow d = b^{\circ}$$

Es decir: $\exists m \in \mathbb{Z}$, tal que: $d = bm \dots (1)$

Además, de (*) tenemos:

$$bc = d(bk - a) \rightarrow bc = d^{\circ}$$

Por el principio de Arquímedes: c y d son PESI $\rightarrow b = d^{\circ}$

Es decir: $\exists n \in \mathbb{Z}$, tal que: $b = dn \dots (2)$

Reemplazando (1) en (2):

$$b = (bm)n \rightarrow mn = 1$$

Se tiene:

$$m = n = 1 \vee m = n = -1$$

$$b = d \vee b = -d$$

Aplicación 03

Si $\frac{17}{xy} + \frac{\overline{ab}}{19} = x + b$, ¿cuántas fracciones impropias de numerador $\overline{b(a+3)(x-1)}$ existen?

A) 135

B) 136

C) 137

D) 138

E) 139

RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\frac{17}{xy}}_{19} + \frac{\overline{ab}}{19} = \overbrace{x+b}^Z \Rightarrow \frac{17 + \overline{ab}}{19} = 1 + b \Rightarrow \underbrace{17}_{19-2} + \overline{ab} = \underbrace{19(1+b)}_{19}$$

$$\Rightarrow \overline{ab} = 19 + 2$$

$$\Rightarrow \overline{ab} = 21 : 40 ; 59 ; 78 ; 97$$

$$\Rightarrow \overline{b(a+3)(x-1)} = 150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

$$\Rightarrow \text{Cant. Divis.}_{(150)} = 2 \times 2 \times 3$$

$$\Rightarrow \text{Cant. Divis.}_{(150)} = 12$$

$$\text{Cant. fracciones} = 149 - 12 = 137$$

REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO NO ENTERO

Se obtiene cuando se dividen los términos de un número racional $\frac{a}{b}$ en base 10, si se dividen en otra base, nos dará la representación correspondiente en dicha base.

Ejemplos: $\frac{27}{8} = 3,375 \longrightarrow$ Decimal exacto

$\frac{13}{21} = 0,4747 \dots_{(8)} = 0,\overline{47}_{(8)} \longrightarrow$ Número inexacto periódico puro en base 8.

$\frac{11}{10} = 1,0333 \dots_{(6)} = 1,0\hat{3}_{(6)} \longrightarrow$ Número inexacto periódico mixto en base 6

REPRESENTACIÓN LINEAL

Al expresar una fracción irreducible en una base n , ésta tendrá la forma:

$$f = \frac{a}{b} = \underbrace{\overline{cd \dots e}}_{\text{parte entera}}, \underbrace{\overline{xy \dots z}}_{\text{parte no entera}}_{(n)}$$

$\longleftarrow$ FORMA LINEAL

ORDEN DE LAS CIFRAS EN LOS NÚMEROS QUE TIENE PARTE MENOR QUE LA UNIDAD:

ORDEN		SUBORDEN		
←	→	←	→	→
2	1	1	2	3
37,254 ₉				

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO NO ENTERO

Consiste en expresar un número racional, en función a potencias de su base, teniendo en cuenta el orden que ocupa cada una de sus cifras.

Ejemplos:

$$43,291 = 4 \times 10^1 + 3 + \frac{2}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{1}{10^3} \quad \left. \vphantom{43,291} \right\} \text{Cantidad finita de cifras decimales}$$

$$0,444 \dots (8) = \frac{4}{8^1} + \frac{4}{8^2} + \frac{4}{8^3} + \dots$$

$$4,123123 \dots (7) = 4 + \frac{1}{7^1} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \frac{2}{7^5} + \frac{3}{7^6} + \dots$$

Cantidad infinita de cifras en la parte no entera

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES

1. Número decimal exacto

Es aquel originado por una fracción irreducible cuyo denominador puede estar formado sólo por factores 2 y/ó 5. La cantidad de cifras en su parte decimal es finita.

Ejemplo:

$$\frac{13}{25} = \frac{13}{5^2} = 0,52, \quad \frac{11}{16} = \frac{11}{2^4} = 0,6875, \quad \frac{319}{500} = \frac{319}{5^3 \times 2^2} = 0,638$$

NOTA:

El mayor exponente de los factores 2 y/ó 5 indica la cantidad de cifras decimales no periódicas que tendrá la fracción decimal.

Ejemplo:

$$\frac{79}{2^{260} \times 5^{275}}$$

tiene 275 cifras decimales no periódicas.

2. Número decimal inexacto Puede ser:

a) Decimal periódico puro

Es aquel número originado por una fracción irreducible ordinaria, cuyo denominador no tiene ningún factor 2 ni 5.

Ejemplos:

$$\frac{5}{33} = 0,151515 \dots = 0,\widehat{15} \quad ,$$

$$\frac{4}{41} = 0,\widehat{09756} \quad ,$$

$$\frac{13}{27} = 0,\widehat{481}$$

GENERATRIZ

$$0,\widehat{abc} = \frac{\overline{abc}}{999}$$

Se denomina decimal inexacto periódico puro, por que al dividir el numerador entre el denominador, no se encuentra un cociente exacto y las cifras del cociente se repiten en forma ilimitada formando periodos.

En otro sistema, de base n :

$$0,\widehat{abc}_{(n)} = \frac{\overline{abc}_{(n)}}{(n-1)(n-1)(n-1)_{(n)}}$$

b) Decimal periódico mixto

Es aquel número originado por una fracción irreducible, cuyo denominador tiene como factor 2 y/o 5 y además otros factores diferentes a los anteriores.

Ejemplos:

$$\frac{17}{44} = \frac{17}{2^2 \times 11} = 0,38\widehat{63} ; \quad \frac{32}{75} = \frac{32}{5^2 \times 3} = 0,42\widehat{6} ; \quad \frac{3}{175} = \frac{3}{5^2 \times 7} = 0,01\overline{714285}$$

GENERATRIZ

$$0,\overline{abcd} = \frac{\overline{abcd} - \overline{ab}}{9900}$$

Se debe tener una fracción equivalente con tantos ceros como cifras no periódicas tenga y tantos nueves como cifras periódicas tenga.

Ejemplo:

$$0,624\widehat{19} = \frac{62419 - 624}{99000} = \frac{61795}{99000}$$

En otro sistema de base m :

$$0,\overline{abcde}_{(m)} = \frac{\overline{abcde}_{(m)} - \overline{ab}_{(m)}}{(m-1)(m-1)(m-1)00_{(m)}}$$

Determinación a priori de la cantidad de cifras de la parte decimal periódica y no periódica de una fracción

Sea la fracción irreducible $f = \frac{p}{2^a \cdot 5^b \cdot K}$ donde K es un número entero positivo que no es múltiplo de 2 ni de 5, entonces con respecto a la representación decimal de f , se tiene:

Cantidad de cifras de la parte no periódica es igual al mayor de los exponentes a o b

Cantidad de cifras de la parte periódica es igual a la cantidad de cifras del menor número compuesto de cifras 9 que contiene a K como factor.

NOTA:

Como un número decimal inexacto es originado por una fracción que en su forma equivalente tiene a un número formado por cifras nueve, es importante tener en cuenta para el análisis la siguiente descomposición:

TABLA DE LOS NUEVES

$$9 = 3^2$$

$$99 = 3^2 \times 11$$

$$999 = 3^3 \times 37$$

$$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$$

$$99999 = 3^2 \times 41 \times 271$$

$$999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$$

Teniendo en cuenta la tabla de la descomposición canónica de los números formados por cifras **9** se concluye lo siguiente:

Los divisores de:

9 :	1 ; 3 ; 9
99 :	1; 3 ; 9 ; 11; 33 ; 99
999 :	1; 3 ; 9 ; 27; 37 ; 111; 333 ; 999
9999 :	1; 3 ; 9 ; 11 ; 33 ; 99 ; 101 ; 303 ; 909 ; 1111; 3333; 9999
99999 :	1; 3; 9; 41; 123; 369; 271; 813; 2439; 11111; 33333; 99999
999999 :	1; 3; 7; 9 ; ... ; 11; 13 ; ... ; 999999

Cantidad de cifras periódicas	K
1	3; 9
2	11; 33; 99
3	27; 37; 111; 333; 999
4	101; 303; 909; 1111; 3333; 9999
5	41; 123; 271; 369; 813; 2439; 11111; 33333; 99999
6	7 ; 13; 11; 37; ... ; 111111; 333333; 999999

Ejemplos:

$$\frac{46}{125} = \frac{46}{5^3} = 0, \overline{368}$$

3 cifras no periódicas

$$\frac{31}{80} = \frac{31}{2^4 \cdot 5^1} = 0, \overline{3875}$$

4 cifras no periódicas

$$\frac{25}{27} = 0, \overline{925}$$

Está contenido en 999, entonces hay 3 cifras en la parte periódica

$$\frac{63}{101} = 0, \overline{6237}$$

Está contenido en 9999, entonces hay 4 cifras en la parte periódica

$$\frac{15}{88} = \frac{15}{2^3 \cdot 11} = 0, 170\overline{45}$$

Hay 3 cifras en la parte no periódica, y 11 está contenido en 99, entonces hay 2 cifras en la parte periódica

$$\frac{\overline{t6}}{1025} = \frac{\overline{t6}}{5^2 \cdot 41} = 0, \overline{abcdefg}$$

Hay 2 cifras en la parte no periódica, y 41 está contenido en 99999, entonces hay 5 cifras en la parte periódica

OBSERVACIÓN:

En el caso de otras bases, por ejemplo en la base 6, se tiene:

Sea la fracción irreducible $f = \frac{p}{2^a \cdot 3^b \cdot K}$

donde: $k \in \mathbb{Z}^+$, $k \neq 2$, $k \neq 3$

Cantidad de cifras de la parte no periódica es igual al mayor de los exponentes a o b

Cantidad de cifras de la parte periódica es igual a la cantidad de cifras del menor número en base 6 compuesto de cifras 5 que contiene a K como factor.

TABLA DE LOS CINCO

$$5_6 = 5$$

$$55_6 = 35 = 5 \times 7$$

$$555_6 = 215 = 5 \times 43$$

$$5555_6 = 1295 = 5 \times 7 \times 37$$

$$55555_6 = 7775 = 5^2 \times 311$$

$$555555_6 = 46655 = 5 \times 7 \times 31 \times 43$$

EJEMPLOS:

$$\frac{13}{56} = \frac{13}{2^3 \cdot 7} = 0, \overline{abcde}_{(6)}$$

$$\frac{41}{86} = \frac{41}{2 \cdot 43} = 0, \overline{mnpqrst}_{(6)}$$

Aplicación 04

Determine la cantidad de cifras no periódicos de $\frac{25\,600}{54! - 32!}$

A) 20

B) 21

C) 22

D) 23

E) 24

Resolución:

$$54! = 2^{50} \dots \quad 32! = 2^{31} \dots$$

$$f = \frac{2^{10} \cdot 5^2}{2^{31} \cdot k}$$

$$f = \frac{5^2}{2^{21} \cdot k}$$

$\Rightarrow$ *Cant. cifras = 21 cifras no periódicas*

Aplicación 05

¿Cuántas fracciones propias e irreducibles de denominador de 2 cifras existen, tales que en base 6, originen un periódico puro de cuatro cifras, cuya última cifra sea 5?

Resolución:

Sea la fracción propia e irreducible: $\frac{N}{D} = 0, \overline{abc5}_{(6)}$

→ El menor número formado por cifras máximas en base 6 que contiene a D es: $5555_{(6)} = 5 \times 7 \times 37$

Como D tiene 2 cifras → $D = 37$

Reemplazando y operando, se tiene: $\frac{N}{37} = \frac{\overline{abc5}_{(6)}}{5555_{(6)}} \rightarrow 35N = \overline{abc5}_{(6)} = \overset{0}{6} + 5$

→ $N = \overset{\circ}{6} + 1$ y $N < 37 \rightarrow N \in \{1; 7; 13; 19; 25; 31\}$

Luego, existen 6 fracciones

FRACCIÓN GENERATRIZ

BASE 10

$$0, \overbrace{abc \dots x}^{\text{"k" cifras}} = \frac{\overbrace{abc \dots x}^{\text{"k" cifras}}}{\underbrace{100 \dots 0}_{\text{"k" cifras}}}$$

DECIMAL
EXACTO

$$0, \overbrace{abc \dots x}^{\text{"k" cifras}} = \frac{\overbrace{abc \dots x}^{\text{"k" cifras}}}{\underbrace{999 \dots 9}_{\text{"k" cifras}}}$$

DECIMAL
INEXACTO
PERIÓDICO
PURO

DECIMAL INEXACTO PERIÓDICO MIXTO

$$0, \underbrace{\overbrace{ab \dots p}^{\text{"k" cifras}}}_{\text{"k" cifras}} \underbrace{\overbrace{q \dots x}^{\text{"p" cifras}}}_{\text{"p" cifras}} = \frac{\overbrace{ab \dots x}^{\text{"k" cifras}} - \overbrace{ab \dots p}^{\text{"k" cifras}}}{\underbrace{99 \dots 90}_{\text{"p" cifras}} \underbrace{00 \dots 0}_{\text{"k" cifras}}}$$

EN OTRA BASE

$$0, \underbrace{\overbrace{ab \dots x_{(n)}}^{\text{"k" cifras}}}_{\text{"k" cifras}} = \frac{\overbrace{ab \dots x_{(n)}}^{\text{"k" cifras}}}{\underbrace{100 \dots 0_{(n)}}_{\text{"k" cifras}}}$$

$$0, \underbrace{\overbrace{ab \dots x_{(n)}}^{\text{"k" cifras}}}_{\text{"k" cifras}} = \frac{\overbrace{ab \dots x_{(n)}}^{\text{"k" cifras}}}{\underbrace{(n-1)(n-1) \dots (n-1)_{(n)}}_{\text{"k" cifras}}}$$

$$0, \underbrace{\overbrace{ab \dots p}^{\text{"k" cifras}}}_{\text{"k" cifras}} \underbrace{\overbrace{q \dots x_{(n)}}^{\text{"p" cifras}}}_{\text{"p" cifras}} = \frac{\overbrace{ab \dots x_{(n)}}^{\text{"k" cifras}} - \overbrace{ab \dots p_{(n)}}^{\text{"k" cifras}}}{\underbrace{(n-1) \dots (n-1)00}_{\text{"p" cifras}} \underbrace{00 \dots 0_{(n)}}_{\text{"k" cifras}}}$$

Aplicación 06

Si se cumple:

$\overline{n(n+1)}, \overline{(n+2)m}_6 = \overline{n1}, \overline{p}_{(3n+1)}$, determine el valor de $m + n + p$.

A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 10

Resolución:

$$\overline{n(n+1)}_6 = \overline{n1}_{(3n+1)}$$

$$6n + n + 1 = n(3n + 1) + 1$$

$$6n = 3n^2$$

$$\Rightarrow 2 = n$$

$$0, \overline{4m}_6 = 0, \overline{p}_{(7)}$$

$$\Rightarrow \frac{4m_6}{55_6} = \frac{p_7}{10_7} \Rightarrow \frac{24 + m}{35} = \frac{p}{7}$$

$$\Rightarrow 24 + m = 5p$$

$$\Rightarrow m = 1 \quad y \quad p = 5$$

$$\Rightarrow m + n + p = 1 + 2 + 5 = 8$$

PROPIEDAD

Sean: $A ; B ; \dots ; P$ enteros positivos PESI 2 a 2, donde ninguno es múltiplo de 2 ni de 5. Si dichos números generan $a ; b ; \dots ; p$, cifras periódicas, entonces el producto de ellos $(A \times B \times \dots \times P)$ genera m cifras periódicas, donde m es el mínimo común múltiplo de $a ; b ; \dots ; p$.

EJEMPLO

$$\frac{79}{707} = \frac{79}{101 \times 7} = 0, \overbrace{ab \dots x}^{12 \text{ cifras}}$$

101 y 7 generan 4 y 6 cifras periódicas respectivamente y como el mínimo común múltiplo de 4 y 6 es 12.

➡ 707 genera 12 cifras periódicas

$$\frac{127}{1517} = \frac{127}{37 \times 41} = 0, \overbrace{ef \dots t}^{10 \text{ cifras}}$$

37 y 41 generan 3 y 5 cifras periódicas respectivamente y como el mínimo común múltiplo de 3 y 5 es 15.

➡ 1517 genera 15 cifras periódicas

PROPIEDAD

Sean p y q dos números enteros positivos PESI, tal que q no es múltiplo de 2 ni de 5, entonces la cantidad de cifras periódicas que genera $\frac{p}{q}$ es un divisor del indicador de Euler de q .

EJEMPLO

$$\frac{14}{17} = 0, \overbrace{ab \dots x}^{16 \text{ cifras}}$$

Como 17 no es múltiplo de 2 ni de 5, entonces la cantidad de cifras periódicas es:

$$\Rightarrow \varphi(17) = (17 - 1) = 16$$

$$\frac{16}{23} = 0, \overbrace{ef \dots t}^{22 \text{ cifras}}$$

Como 23 no es múltiplo de 2 ni de 5, entonces la cantidad de cifras periódicas es:

$$\Rightarrow \varphi(23) = (23 - 1) = 22$$

OBSERVACIÓN

Cuando el denominador de una fracción irreducible no tiene como factor al 2 ni al 5, el número decimal que se genera es un número decimal periódico puro, y para determinar la cantidad de cifras en su periodo se tiene:

Sea f una fracción irreducible, $D \neq \frac{0}{2} \wedge D \neq \frac{0}{5}$

$$f = \frac{N}{D} = \overline{a \dots h}, \overline{i \dots t} \rightarrow \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ cifras}} = \frac{0}{D}$$

$$\rightarrow 10^k - 1 = \frac{0}{D} \rightarrow 10^k = \frac{0}{D} + 1$$

Como k es mínimo, se tiene que k es el gaussiano de las potencias de 10 respecto al módulo D

EJEMPLO: $\frac{37}{81} = \frac{37}{3^4} = 0, \overline{i \dots t}$

$$\rightarrow \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ cifras}} = \frac{0}{81} \rightarrow \underbrace{11 \dots 1}_{k \text{ cifras}} = \frac{0}{9}$$

Suma de cifras $k = 9$

$$\rightarrow k = 9 \rightarrow k = 3^{4-2}$$

Luego: $f = \frac{N}{3^n} = \overline{a \dots h}, \underbrace{\overline{i \dots t}}_{3^{n-2} \text{ cifras}}, \forall n \geq 2$

Sea f una fracción irreducible, P es primo ($P > 5$), tal que:

$$f = \frac{N}{P^n} = \overline{a \dots h}, \underbrace{i \dots t}_{(P^{n-1} \times G) \text{ cifras}}$$

donde G es el gaussiano de las potencias de 10 respecto al módulo P

APLICACIÓN 7 ¿Cuántas cifras periódicas genera $f = \frac{2}{11^3}$?

RESOLUCIÓN Como: 11 es primo y mayor que 5

➡ Cantidad de cifras periódicas =

$$= 11^{3-1} \times G$$

$$= 11^2 \times 2$$

$$= 242$$

Donde:

$$10^0 = \frac{\overset{\circ}{1}}{11} + 1$$

$$10^1 = \frac{\overset{\circ}{1}}{11} - 1$$

$$10^2 = \frac{\overset{\circ}{1}}{11} + 1$$

$$10^3 = \frac{\overset{\circ}{1}}{11} - 1$$

⋮

$$G = 2$$

Aplicación 7

¿Cuántas cifras tiene el periodo de $f = \frac{41}{7^3 \times 11^2}$?

A) 12

B) 60

C) 686

D) 864

E) 3234

Resolución:

$$f = \frac{41}{7^3 \cdot 11^2}$$

$$\Rightarrow 7^3 \Rightarrow 7^{3-1} \cdot G = 7^2 \cdot 6 = 294$$

$$10^0 = \frac{0}{7} + 1$$

$$10^1 = \frac{0}{7} + 3$$

$$10^2 = \frac{0}{7} + 2$$

$$10^3 = \frac{0}{7} + 6$$

$$\Rightarrow 11^2 \Rightarrow 11^{2-1} \cdot G = 11 \cdot 2 = 22$$

$$10^0 = \frac{0}{11} + 1$$

$$10^1 = \frac{0}{11} + 10$$

$$10^2 = \frac{0}{11} + 1$$

$$\Rightarrow \text{Cant. cifras} = \text{MCM}(294; 22) = 3234$$

DENSIDAD DE LOS RACIONALES Y LAS FRACCIONES

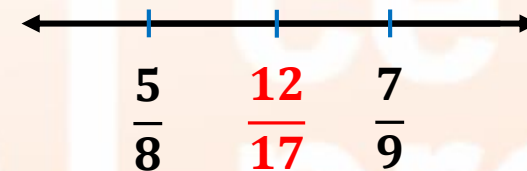
EL CONJUNTO $\mathbb{Q}$ ES DENSO EN LOS REALES

Entre dos números racionales diferentes siempre existe otro racional

EJEMPLO:

a) Determinar un racional entre los números $\frac{5}{8}$ y $\frac{7}{9}$

$$\frac{5+7}{8+9} = \frac{12}{17} \rightarrow \text{La fracción } \frac{12}{17} \text{ se ubica entre racionales } \frac{5}{8} \text{ y } \frac{7}{9}$$

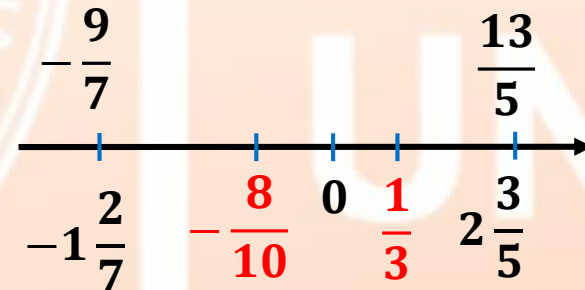


b) Insertar dos números racionales entre $-1\frac{2}{7}$ y $2\frac{3}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} -1\frac{2}{7} = -\frac{9}{7} \\ 2\frac{3}{5} = \frac{13}{5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Primero insertamos:} \\ \frac{-9+13}{7+5} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{array}$$

Luego podemos insertar:

$$\frac{-9+1}{7+3} = -\frac{8}{10}$$



PROPIEDAD DE LA DENSIDAD

El conjunto $\mathbb{Q}$ es denso porque entre dos números racionales diferentes siempre existe otro racional. Dados dos números racionales distintos, α y β , siempre existe otro número racional γ , tal que: $\alpha < \gamma < \beta$. Para ello, si

$$\alpha = \frac{a}{b} \text{ y } \beta = \frac{c}{d}, \text{ con } b \text{ y } d \text{ positivos; se puede considerar: } \gamma = \frac{a + c}{b + d}$$

Luego, reiterando el proceso de introducir un racional entre cada dos racionales distintos, es claro que entre dos racionales distintos existen infinitos racionales distintos.

EJEMPLO: Entre $4/7$ y $5/6$ se encuentra $9/13$.

Ahora entre $4/7$ y $9/13$ se encuentra $13/20$, entre $4/7$ y $13/20$ se encuentra $17/27$, etc., tenemos así:

$$4/7 < \dots < 17/27 < 13/20 < 9/13 < 5/6.$$

Por eso se dice que el conjunto de los racionales es un conjunto denso.

La propiedad de la Densidad de los racionales en los reales implica que para todo número real existe una sucesión de números racionales que converge a dicho número racional.

Esto quiere decir que para todo número real r ya sea racional ó irracional siempre existe una sucesión de números racionales a_n que converge a dicho número real. Esto es, siempre se puede encontrar un a_n tan cerca de r como se quiera.

EJEMPLO Se define la siguiente sucesión de números racionales $a_0; a_1; a_2; \dots$ en forma recursiva

donde: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$, para $n = 0; 1; 2; 3; \dots$

Luego:

$$a_1 = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{a_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_1} = \frac{1,5}{2} + \frac{1}{1,5} = \frac{17}{12} = 1,41666 \dots$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} + \frac{1}{a_2} = \frac{17/12}{2} + \frac{1}{17/12} = \frac{577}{408} = 1,4142156 \dots$$

Se observa que esta sucesión converge a

$$\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$$



ce
pre
UNI

Aritmética

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ce
pre
UNI



Problema 01

La fracción $\frac{a}{46}$ es propia e irreducible y además menor a $0,1555 \dots$, calcule la suma de los valores que puede tomar a .

A) 420

B) 468

C) 490

D) 513

E) 523

Resolución:



Problema 03

El profesor Tony forma dos fracciones con las dos últimas cifras del año de su nacimiento, dichas fracciones se diferencian en $3,2142857142857 \dots$, calcule la suma de las cifras del año de nacimiento del profesor Tony si está próximo de celebrar su cumpleaños.

A) 17

B) 18

C) 19

D) 20

E) 21

Resolución:



Problema 05

Si $\overline{a, bcd\hat{e}}$ es el resultado de sumar todas las fracciones positivas menores a 2 cuyo denominador es igual a 24 y el numerador tenga raíz cuadrada exacta, calcule $a + b + c + d + e$.

A) 18

B) 26

C) 27

D) 28

E) 30

Resolución:





Problema 07

Si $\frac{S}{2m6m}$ es equivalente a la fracción $\frac{13}{19}$, calcule la suma de cifras de $S . m$.

A) 45

B) 36

C) 27

D) 18

E) 12

Resolución:





Problema 09

Se tienen las fracciones equivalentes $\frac{\overline{mn}}{\overline{pq}} = \frac{4}{3} = \frac{\overline{nm}}{\overline{qp}}$, calcule el valor de $m.n + p.q$.

A) 28

B) 30

C) 42

D) 50

E) 54

Resolución:





Problema 11

Si $\frac{M}{43} = 0,505505505 \dots (n)$ calcule la suma de cifras de M.

A) 6

B) 8

C) 9

D) 10

E) 12

Resolución:



Problema 13

A los dos términos de una fracción propia e irreducible se le agregan dos unidades y la fracción resultante excede a la inicial en $\frac{13_{(5)}}{55_{(6)}}$, calcule la suma de los términos de la fracción inicial.

A) 5

B) 6

C) 8

D) 9

E) 12

Resolución:

Problema 14

Si $0,222\dots_{(9)} = \frac{1}{a} + \frac{5}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{5}{a^4} + \dots$, calcule la suma de cifras periódicas que se obtiene al expresar $0,3125$ en base a .

A) 2

B) 3

C) 5

D) 6

E) 7

Resolución:

Problema 17

Sea F un número entero de la forma $F = \frac{7}{d_1} + \frac{9}{d_2} + \frac{11}{d_3} + \dots + \frac{55}{d_n}$ donde las fracciones son propias y homogéneas, calcule la suma de cifras del mayor valor de F .

A) 5

B) 7

C) 9

D) 10

E) 18

Resolución:

Problema 19

Calcule la suma de los 50 primeros números naturales que su escritura inicia con cifra tres tales que al suprimir esta cifra el número resultante es $\frac{1}{16}$ del número inicial.

A) $16 \cdot \left(\frac{10^{50}-1}{9} \right)$

B) $32 \cdot \left(\frac{10^{50}-1}{9} \right)$

C) $160 \cdot \left(\frac{10^{50}-1}{9} \right)$

D) $320 \cdot \left(\frac{10^{50}-1}{9} \right)$

E) $32 \cdot \left(\frac{10^{51}-1}{9} \right)$

Resolución:

Problema 21

Sea la fracción $F = \frac{1}{m}$ que genera un número decimal periódico mixto con igual cantidad de cifras periódicas y no periódicas, calcule la cantidad de valores menores a 500 que puede tomar m .

A) 10

B) 11

C) 12

D) 13

E) 14

Resolución:

Problema 23

A un recipiente lleno de vino se le extrae los $\frac{2}{7}$ de su volumen y se reemplaza por agua, luego se saca $\frac{1}{5}$ del volumen y se reemplaza por agua y por último se extrae la mitad del volumen y se reemplaza por vino, calcule qué fracción del volumen inicial del recipiente representa el volumen de agua al final.

A) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{6}{7}$

C) $\frac{3}{7}$

D) $\frac{1}{7}$

E) $\frac{3}{14}$

Resolución:



Problema 25

La fracción irreducible $\frac{a}{mn}$ genera un número decimal periódico puro con tres cifras en el periodo que están en progresión aritmética creciente de razón 2, calcule el valor de $a . m . n$.

A) 45

B) 68

C) 105

D) 144

E) 156

Resolución:



Problema 28

La siguiente fracción $\frac{320}{(35!)^n - (29!)^n}$ genera 69 cifras no periódicas, calcule el valor de n^2 .

A) 1

B) 4

C) 9

D) 16

E) 25

Resolución:

Problema 30

Si: $S = \frac{1}{4} + \frac{3}{8^2} + \frac{1}{4^4} + \frac{3}{8^4} + \frac{1}{4^7} + \frac{3}{8^6} + \dots$. Calcular el valor de “S”, de cómo respuesta la suma de los términos de su fracción irreducible equivalente.

A) 45

B) 56

C) 67

D) 78

E) 82

Resolución: